La sculpture et les nombres

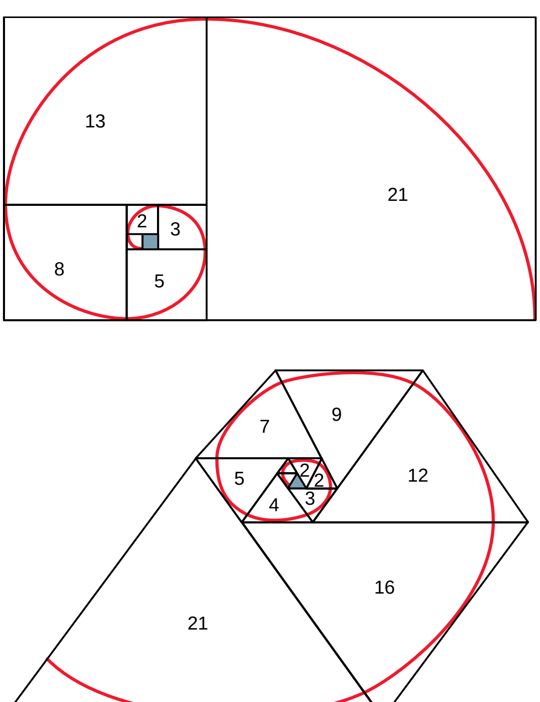
IAN STEWART

Comme le nombre d'or, le nombre plastique inspire les sculpteurs.

Alan Saint George est un architecte britannique à la retraite qui vit au Portugal et qui crée des sculptures mathématiques. Il utilise fréquemment les propriétés du nombre d'or, ainsi que celles d'un cousin moins prestigieux, le «nombre plastique», qu'il a découvert grâce l'architecte Richard Padovan. Le nombre plastique a une courte histoire en architecture, mais son origine mathématique est au moins aussi respectable que celle de son cousin doré. On ne l'a pas trouvé dans la nature aussi fréquemment que le nombre d'or, mais personne ne l'avait vraiment cherché.

Commençons avec le nombre d'or, qui vérifie l'égalité $\phi = 1 + 1/\phi$; ϕ est égal à 1,618034... Ce nombre a des relations avec les nombres de Fibonacci, que l'on construit géométriquement en formant une spirale à partir de carrés *(voir la figure 1 en haut)*. Le carré initial *(en gris)* a un côté de longueur égale à 1, de même que son voisin de gauche. On ajoute alors un carré, dont la longueur du côté est égale à 2, au-dessus des deux premiers carrés, puis on poursuit l'ajout des carrés adjacents, en tournant : la longueur du côté augmente selon la suite : 3, 5, 8, 13, 21..., chaque nombre de cette suite étant la somme des deux nombres précédents. Cette suite est nommée suite de Fibonacci. Le rapport de deux nombres successifs tend vers le nombre d'or ϕ. Par exemple, 5/3 est égal à 1,6666..., et 21/13 est égal à 1,615384...

Ces propriétés résultent de la règle qui engendre les nombres de Fibonacci : pour les grands nombres, elle conduit à l'équation $\phi = 1 + 1/\phi$. Quand on trace un quart de cercle à l'intérieur de chacun des carrés précédents, les arcs forment une spirale harmonieuse, qui approche la spirale logarithmique, souvent présente dans la nature : les graines du tournesol ou les coquilles du nautile sont enroulées ainsi. Les tours de spirale croissent en raison du nombre d'or.



1. Construction géométrique des nombres de Fibonacci *(en haut)* et des nombres de Padovan *(en bas)*.

LE NOMBRE PLASTIQUE

Passons maintenant au nombre plastique. On commence sa construction en utilisant un principe analogue, mais en utilisant des triangles équilatéraux à la place des carrés *(voir la figure 1, en bas)*. Au triangle initial *(en gris)*, on ajoute des triangles successifs dans le sens des aiguilles d'une montre. La spirale, à nouveau, est approximativement logarithmique. Les trois premiers triangles ont un côté de longueur égale à 1 ; les deux triangles suivants ont un côté de longueur égale à 2 ; puis les longueurs des côtés sont égales à 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21... Là encore, la règle de construction des nombres successifs est simple : chaque nombre s'obtient en laissant de côté le nombre précédent et en ajoutant les deux nombres qui précédaient celui-ci : 21 est égal à 9 + 12. J'aimerais donner à cette suite le nom de Richard Padovan qui l'a étudiée (par une coïncidence heureuse, «Padovan» a la même origine que «Padoue», ville peu éloignée de Pise, dont Fibonacci était originaire).

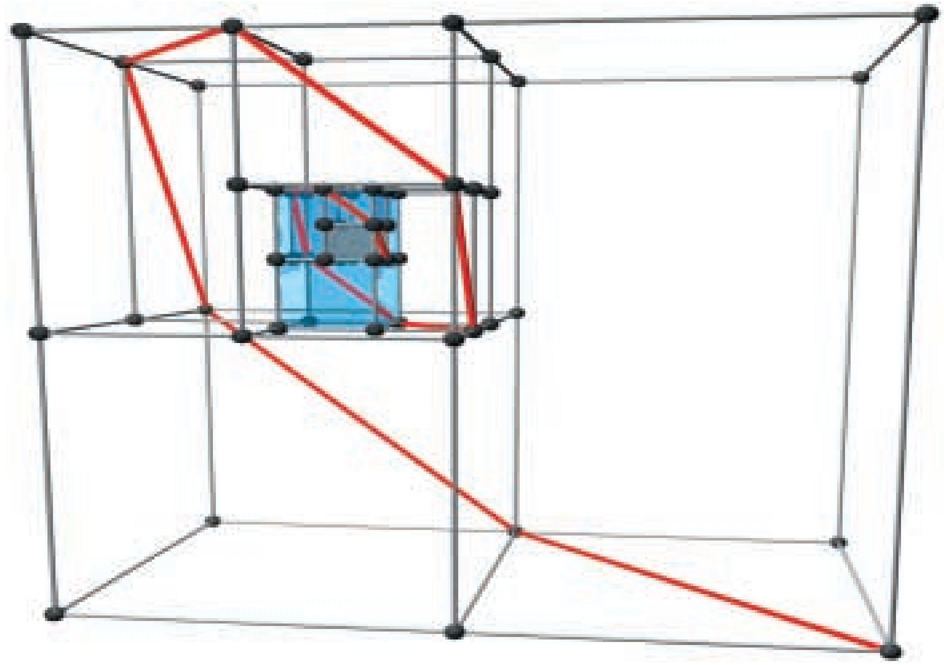
Du point de vue algébrique, les règles de construction des suites de Fibonacci $F(n)$ et de Padovan $P(n)$ sont les suivantes : $F(n + 1) = F(n) + F(n - 1)$, avec $F(0) = F(1) = 1$; $P(n + 1) = P(n - 1) + P(n - 2)$, avec $P(0) = P(1) = P(2) = 1$. En reprenant pour la suite de Padovan la définition du nombre d'or, nous obtenons le nombre plastique p, limite du rapport des nombres successifs de Padovan : 1,324718... L'écriture algébrique permet d'établir l'équation $p = 1/p + 1/p^2$, ou encore $p^3 - p - 1 = 0$; p est l'unique nombre réel qui soit solution de cette équation.

La suite de Padovan augmente moins vite que celle de Fibonacci, et p est inférieur à ϕ. Elle a de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, la figure illustre avec des triangles l'égalité 21 = 16 + 5 ; elle donne aussi une autre définition de la suite de Padovan : $P(n + 1) = P(n) + P(n - 4)$.

Des nombres tels que 3, 5, et 21 appartiennent aux suites de Padovan et de Fibonacci. En existe-t-il d'autres? Si oui, combien? Certains nombres de Padovan, tels que 9, 16 et 49, sont des carrés ; en existe-t-il d'autres? Les racines carrées de ces nombres sont respectivement 3, 4 et 7, qui sont également des nombres de Padovan. Les racines carrées des autres carrés de Padovan sont-elles également des nombres de Padovan? Voilà des questions qui méritent un peu d'attention.

Une autre façon de construire les nombres de Padovan consiste à reproduire l'utilisation des carrés pour les nombres de Fibonacci, mais avec des parallélépipèdes *(voir la figure 2)*. Partons d'un cube de côté égal à 1, et plaçons à côté de lui un autre cube identique, adjacent par une face. On obtient un parallélépipède dont deux côtés sont égaux à 1, et le troisième côté est égal à 2 (parallélépipède $1 \times 1 \times 2$). Contre la face 1×2, plaçons un autre parallélépipède $1 \times 1 \times 2$. Nous obtenons un parallélépipède $1 \times 2 \times 2$. Puis, contre une face 2×2, plaçons un cube $2 \times$

2 × 2, afin de former au total un parallélépipède 2 × 2 × 3. Contre une face 2 × 3, plaçons un parallélépipède 2 × 2 × 3, afin d'obtenir un parallélépipède 2 × 3 × 4, et ainsi de suite en ajoutant successivement des parallélépipèdes à l'Est, au Sud, en bas, à l'Ouest, au Nord, et en haut. À chaque étape, le nouveau parallélépipède a pour longueur des côtés trois nombres de Padovan consécutifs. En outre, si l'on relie les faces carrées successives des parallélépipèdes par des segments de droite, on obtient une spirale. Cette spirale reste dans un plan. A. Saint George a fondé ses sculptures sur cette propriété, en utilisant des tiges rigides terminées par des boules de liaison (quel diagramme forme l'intersection de ce système de parallélépipèdes avec ce plan ?).



2. Les nombres de Padovan s'obtiennent également à l'aide de spirales formées par juxtaposition de parallélépipèdes.

La suite de Perrin

Une suite analogue à celle de Padovan, avec les mêmes règles de construction mais des valeurs initiales différentes, a été étudiée en 1876 par le mathématicien français Édouard Lucas. Comme les idées de ce dernier ont été développées par R. Perrin en 1899, la suite est aujourd'hui nommée suite de Perrin. Les nombres de Perrin *A(n)* diffèrent des nombres de Padovan, parce que $A(0) = 3$, $A(1) = 0$ et $A(2) = 2$. Le rapport de deux nombres de Perrin consécutifs est encore égal à *p*, mais Lucas observa une propriété plus intéressante : pour tous les nombres *n* premiers, *n* divise exactement *A(n)*. Par exemple, 19 est premier, $A(19) = 209$, et $209/19 = 11$.

Ce théorème donne un test de non-primalité. Par exemple, pour $n = 18$, on a $A(18) = 158$, et $158/18 = 8{,}777$, qui n'est pas entier ; aussi conclut-on que 18 est un nombre composé, c'est-à-dire non premier. Plus généralement, on utilise les nombres de Perrin pour déterminer la non-primalité : tout nombre *n* qui ne divise pas *A(n)* est composé.

Si *n* divise *A(n)*, n est-il premier ? Voilà une fascinante question ouverte. Personne n'a trouvé de nombre composé *n* qui divise *A(n)*, mais personne n'a démontré qu'un tel nombre, nommé nombre pseudo premier de Perrin, n'existe pas. En 1991, Steven Arno, du Centre de recherche informatique de Bowie, a démontré que les nombres pseudo premiers de Perrin doivent avoir plus de 14 chiffres. Si vous avez entendu parler de progrès dans l'étude de ce problème, n'hésitez pas à m'écrire.

La conjecture de l'existence des nombres pseudo premiers de Perrin est importante, car le reste de la division de *A(n)* par *n* se calcule rapidement. Si la conjecture était démontrée, on obtiendrait un test de primalité (en 1982, à l'Université du Maryland, William Adams et Daniel Shanks ont trouvé un moyen de calculer ce reste en log*(n)* étapes). Ainsi, la conjecture aurait des applications utiles en cryptographie, laquelle est aujourd'hui souvent fondée sur les nombres premiers.

Réaction

Richard Delaware, de l'Université de Kansas City, m'a signalé que, en 1992, Rick Norwood, George Poole et Michael Laidacker ont trouvé une couverture de maman ver (voir *La couverture*, *Pour la Science*, mars 1996) d'aire égale à 0,27523. Cette couverture est plus petite que celle qui avait été trouvée en 1973 par Gerriets et Poole.

Ce résultat détient sans doute encore le record, parce que la couverture *ABCD (à droite)* que je présentais est moins bonne que prévue. Richard Kendon, de Nottingham, a trouvé un ver que la couverture ne recouvre pas. Il a observé que les angles *DAB* et *ADC* sont respectivement égaux à 75 et 30 degrés. Son ver *EFGH* est composé de trois segments. Le point *G* est à une distance *x* sur une droite qui fait un angle *GDA* de 15 degrés, et le point *F* est à la distance $1 - 2x$ de *G* sur la droite *AD*. Le point *E* est à la distance *x* de *F*, de sorte que l'angle *EFA* est égal à 15 degrés. R. Kendon a calculé que, pour $x = 0{,}01$, par exemple, l'angle *EAD* est égal à 75,177 degrés, c'est-à-dire supérieur à 75 degrés : le point *E* n'est pas dans la couverture.